Proposition d'une sémantique catégorielle de DEVS

Jean-Pierre Müller
CIRAD-GREEN
jean-pierre.muller@cirad.fr

JFMS – Cargèse, 2 novembre 2020

Contenu

- **Introduction**
- Les méta-modèles
- Le morphisme
- Conclusion

Introduction

- Sémantique dénotationnelle:
  - Dénotation: relation entre un représentant et un représenté
  - Informatique: théorie de la sémantique des langages de programmation
- Représentant:
  - Langage de description de systèmes dynamiques: DEVS
- Représenté:
  - Les trajectoires de ces systèmes dans le temps

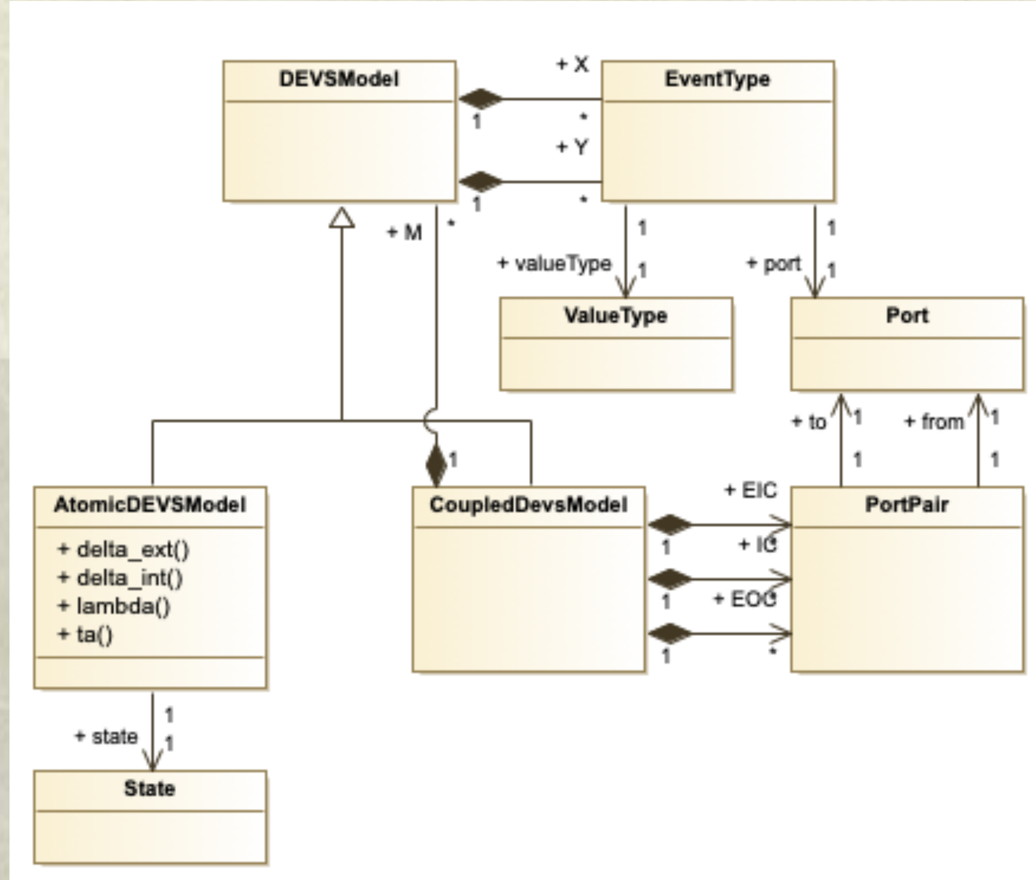
Méthode

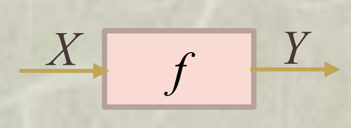
- Méta-modèle de DEVS (représentant)
- Méta-modèle de la théorie des catégories (représenté)
- Morphisme de l'un dans l'autre (dénotation)
- …et un peu plus compliqué que ça

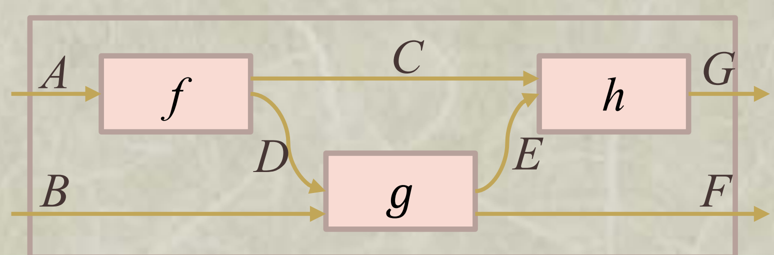
Contenu

- Introduction
- **Les méta-modèles**
- Le morphisme
- Conclusion

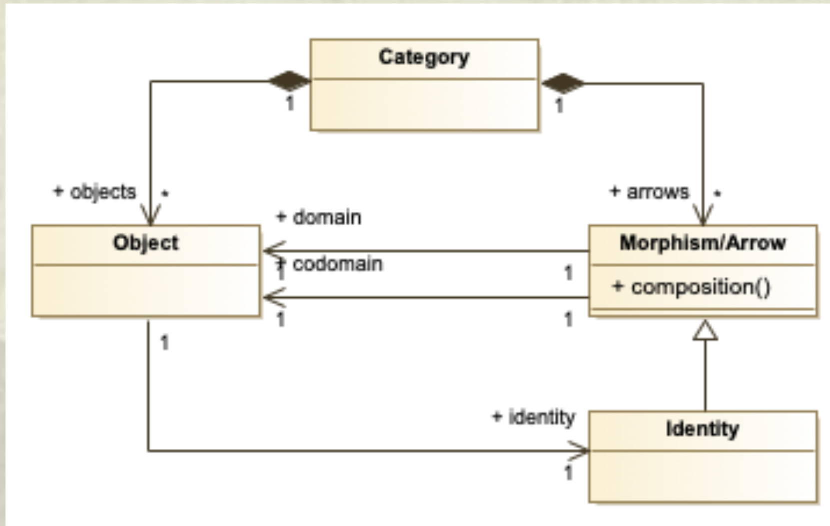
Méta-modèle DEVS



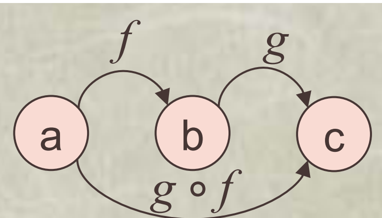




Méta-modèle d'une catégorie

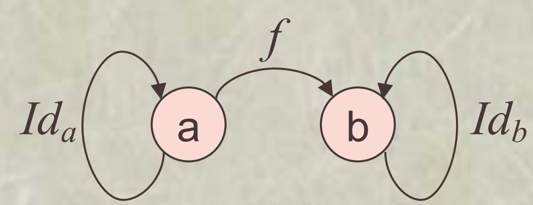


- Compositionalité:



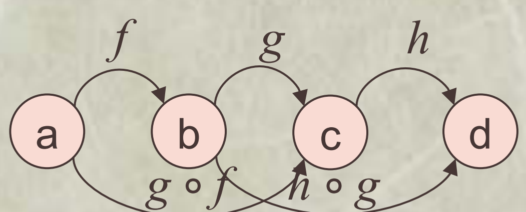
$g \circ f(\_) \cong g(f(\_))$

- Unitalité:



$Id_b \circ f = f \circ Id_a$

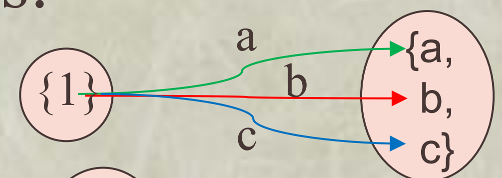
- Associativité:



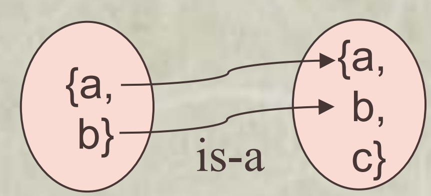
$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Exemple: la catégorie ***Set***

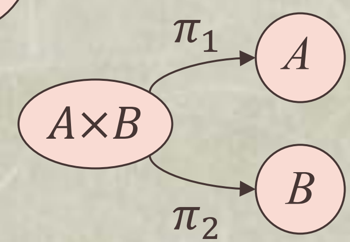
- Les objets sont les <u>ensembles</u>, les flèches sont les <u>fonctions</u>
- Quelques constructions:
  - Appartenance:



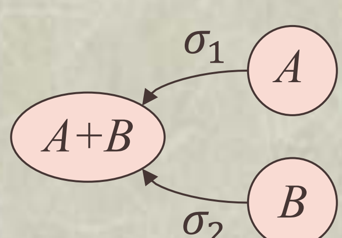
  - Inclusion:



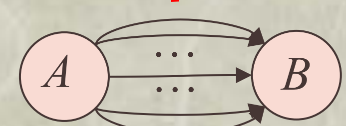
  - Produit:

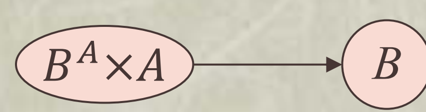


  - Somme:



  - Puissance: $B^A = Hom_{Set}(A,B)$





Contenu

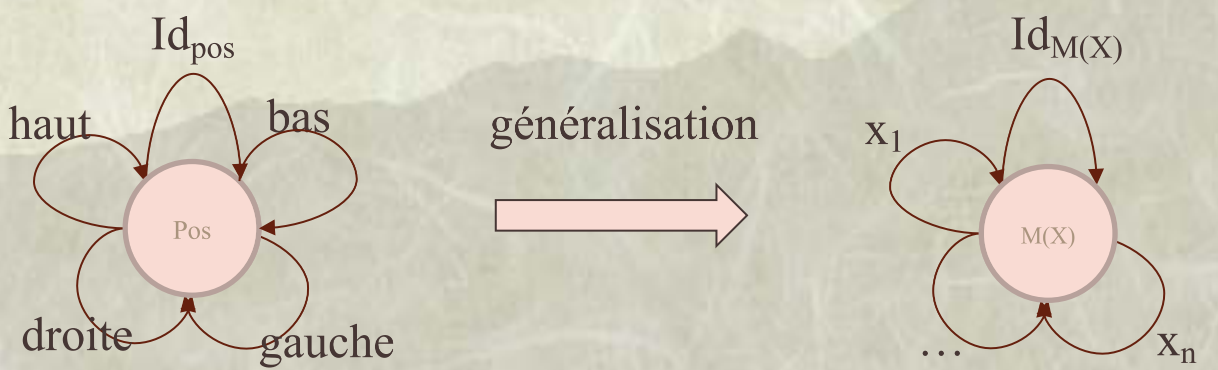
- Introduction
- Les méta-modèles
- **Le morphisme**
- Conclusion

Monoïdes et trajectoires (1)

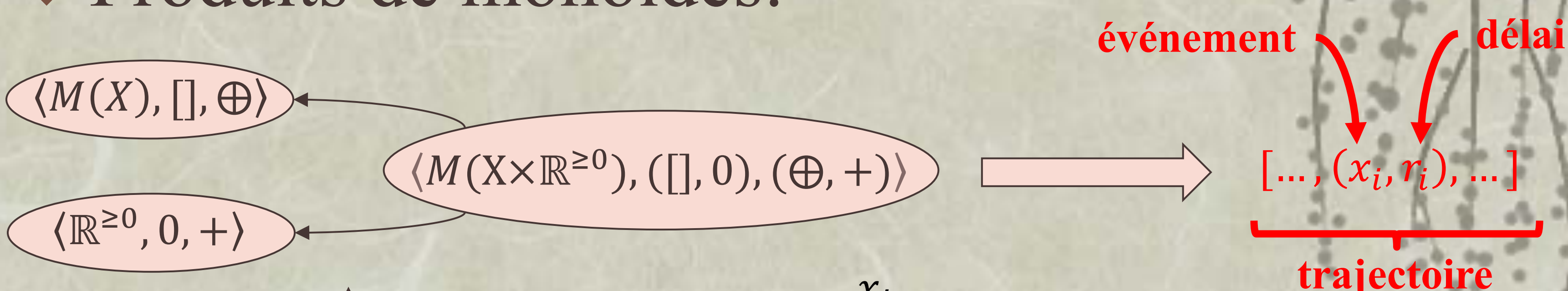
- X: ensemble d'événements/actions
  - Trajectoire de Xs => Monoïde libre sur X
- Monoïde M: $\langle Y, e, \oplus \rangle$ tel que:
  - $y_i \oplus e = e \oplus y_i = y_i$: élément neutre;
  - $y_i \oplus (y_j \oplus y_k) = (y_i \oplus y_j) \oplus y_k$: associativité
  - $\langle \mathbb{R}^{\geq 0}, 0, + \rangle$ et $\langle \mathbb{N}, 0, + \rangle$ sont des monoïdes
- Monoïde libre sur X: $\langle M(X), [], \oplus \rangle$:
  - M(X): ensemble des séquences de X;
  - []: la séquence vide;
  - $\oplus: M(X) \times M(X) \longmapsto M(X)$: concaténation;

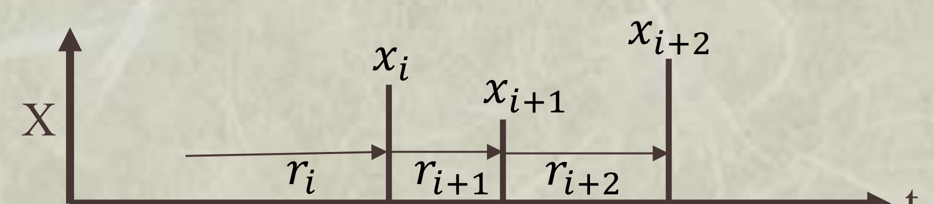
Monoïdes et trajectoires (2)

- Catégorie monoïdale:



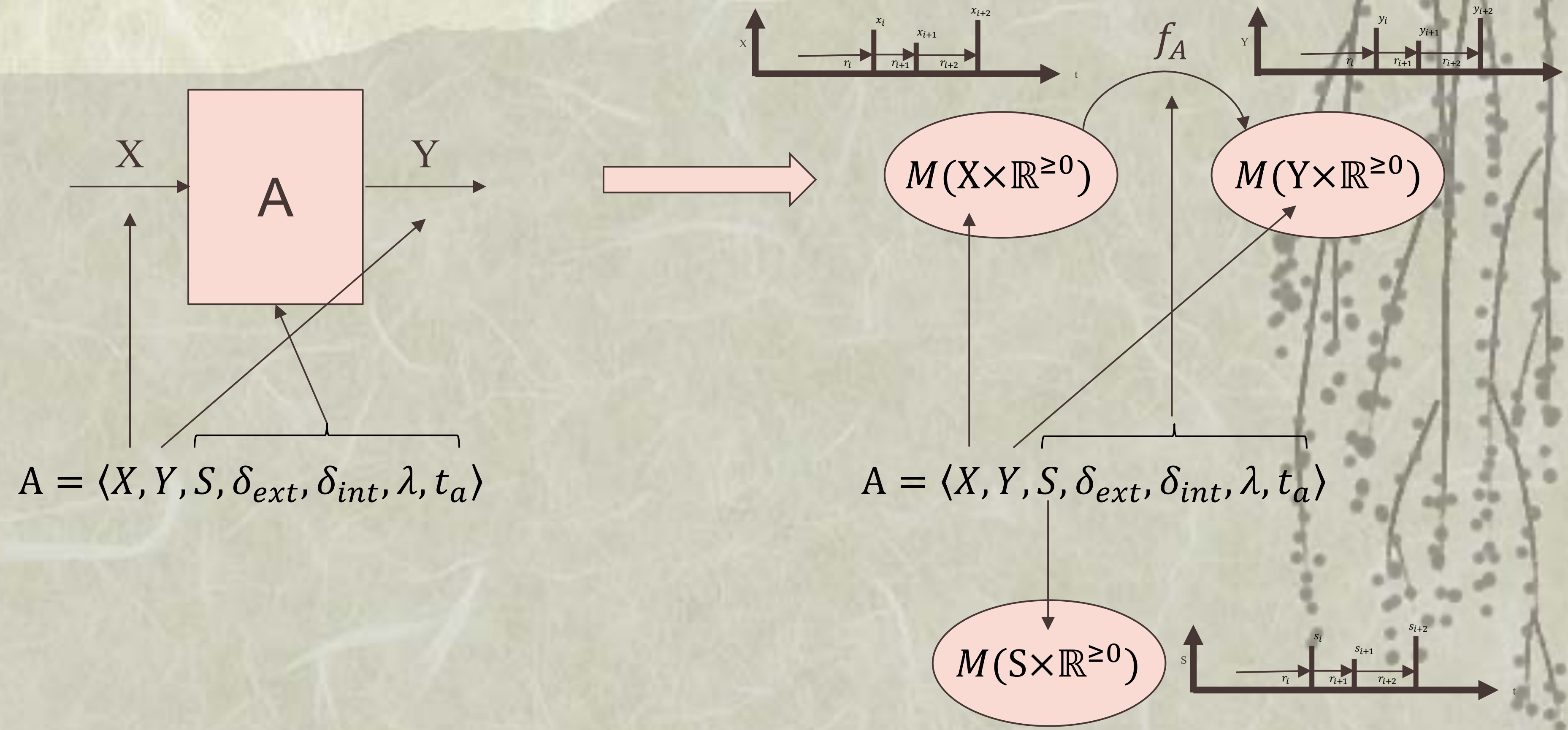
- Produits de monoïdes:





DEVS atomique: principe

$M(\_\times\mathbb{R}^{\geq 0})$ = Monoïde produit = Trajectoire



DEVS atomique: morphisme

$$A = \langle X, Y, S, \delta_{ext}, \delta_{int}, \lambda, t_a \rangle$$

$$\delta : (X \times \mathbb{R}^{\geq 0}) \times S \mapsto M(S \times \mathbb{R}^{\geq 0})$$

$$((x_i, r_i), s_i) \rightarrow \begin{cases} r_i < t_a(s_i) & [(\delta_{ext}(x_i, s_i), r_i)] \\ r_i = t_a(s_i) & \begin{cases} [(\delta_{ext}(x_i, \delta_{int}(s_i)), r_i)] \\ [(\delta_{int}(\delta_{ext}(x_i, s_i)), r_i)] \end{cases} \\ r_i > t_a(s_i) & [(\delta_{int}(s_i), t_a(s_i))] \oplus \delta((x_i, r_i - t_a(s_i)), \delta_{int}(s_i)) \end{cases}$$

$$\delta' : M(X \times \mathbb{R}^{\geq 0}) \mapsto M(S \times \mathbb{R}^{\geq 0})$$

$$[(x_1, r_1), \ldots, (x_n, r_n)] \rightarrow \begin{cases} n = 0 & [] \\ n \geq 1 & \delta'([(x_1, r_1), \ldots, (x_{n-1}, r_{n-1})]) \oplus \delta\big((x_n, r_n), s_{n-1}\big) \end{cases}$$

$$\lambda' : M(S \times \mathbb{R}^{\geq 0}) \mapsto M(Y \times \mathbb{R}^{\geq 0})$$

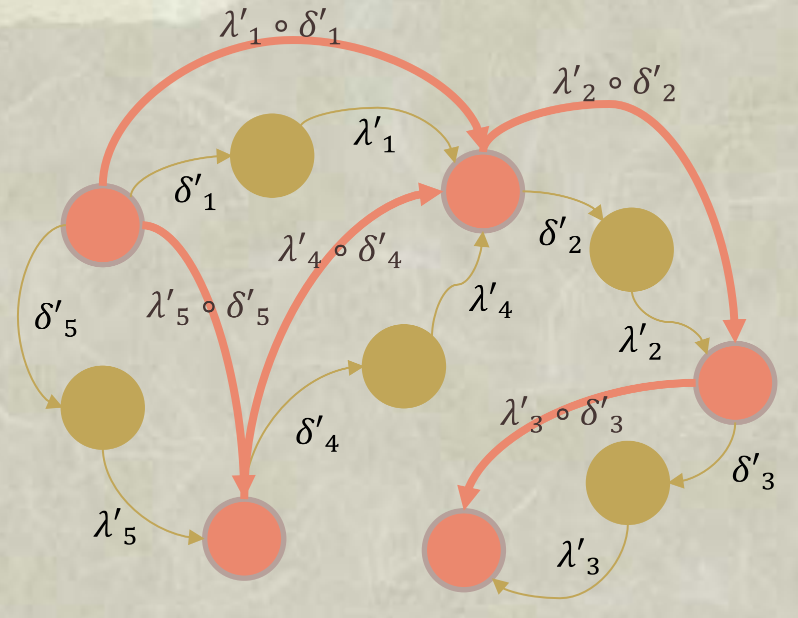
$$[(s_1, r_1), \ldots, (s_n, r_n)] \rightarrow [(\lambda(s_1), r_1), \ldots, (\lambda(s_n), r_n)]$$

$$f_A = \lambda' \circ \delta'$$

$$M(X \times \mathbb{R}^{\geq 0}) \xrightarrow{f_A} M(Y \times \mathbb{R}^{\geq 0})$$

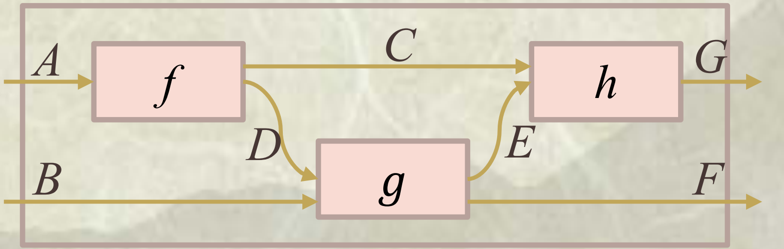
DEVS atomique: résultat

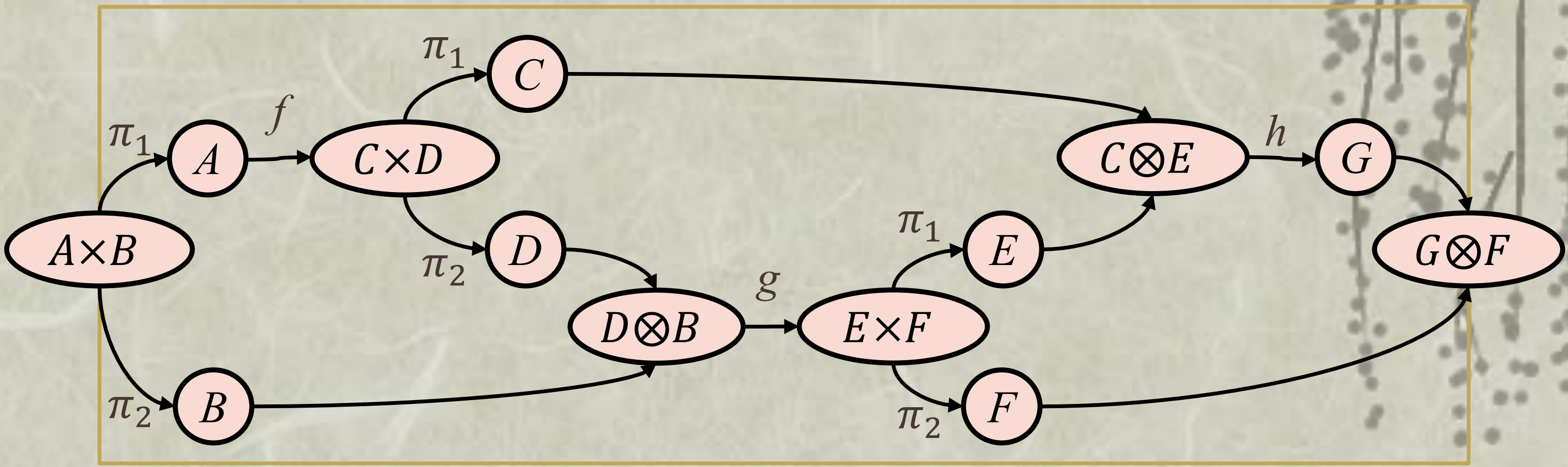
- Réseau de systèmes dynamiques comme catégorie de Monoïdes:



- Articulation des niveaux 2 et 3 de la hiérarchie des spécifications

DEVS couplé: principe





Catégorie monoïdale symétrique

- Catégorie C munie d'un endofoncteur:
  - $I \in Ob(C)$;
  - $\otimes : Ob(C) \times Ob(C) \longmapsto Ob(C)$ tel que:
    - $I \otimes c \cong c \otimes I \cong c$;
    - $(c \otimes d) \otimes e \cong c \otimes (d \otimes e)$;
    - $c \otimes d \cong d \otimes c$.

Entrée d'un modèle DEVS

- Dans la catégorie des trajectoires, on choisit:
  - $I = \{([\,], 0)\}$;
  - ε : l'événement vide ;
  - $\otimes$: $M(X_1 \times \mathbb{R}^{\geq 0}) \times M(X_2 \times \mathbb{R}^{\geq 0}) \longmapsto M(X_1 \times X_2 \times \mathbb{R}^{\geq 0})$:

    $([(x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n)], [(x'_1, r'_1), \dots, (x'_m, r'_m)]) \rightarrow$

    si $n = m = 0$, $[\,]$;

    si $n = 0, m \geq 1$, $[(\varepsilon, x'_1, r'_1), \dots, (\varepsilon, x'_m, r'_m)]$;

    si $m = 0, n \geq 1$, $[(x_1, \varepsilon, r_1), \dots, (x_n, \varepsilon, r_n)]$;

    si $n \geq 1, m \geq 1$,

    si $r_1 > r'_1$,

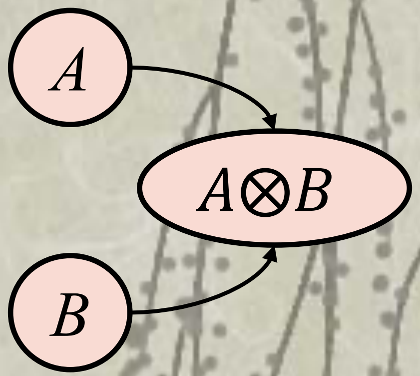
    $[(x'_1, \varepsilon, r'_1)] \oplus ([(x_1, r_1 - r'_1), \dots, (x_n, r_n)] \otimes [(x'_2, r'_2), \dots, (x'_m, r'_m)])$;

    si $r_1 < r'_1$,

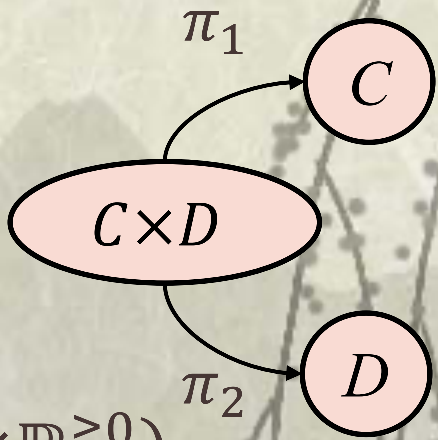
    $[(\varepsilon, x_1, r_1)] \oplus ([(x_2, r_2), \dots, (x_n, r_n)] \otimes [(x'_1, r'_1 - r_1), \dots, (x'_m, r'_m)])$;

    si $r_1 = r'_1$ (parallèle),

    $[(x_1, x'_1, r_1)] \oplus ([(x_2, r_2), \dots, (x_n, r_n)] \otimes [(x'_2, r'_2), \dots, (x'_m, r'_m)])$



Décomposition d'un produit monoïdal



- Fonctions de décomposition:

$$\pi_i : M(Y_1 \times \cdots \times Y_n \times \mathbb{R}^{\geq 0}) \longmapsto M(Y_i \times \mathbb{R}^{\geq 0})$$

$$[(y_1^1, \dots, y_n^1, r_1), \dots, (y_1^m, \dots, y_n^m, r_m)]$$

$$\rightarrow [(y_i^1, r_1), \dots, (y_i^m, r_m)]$$

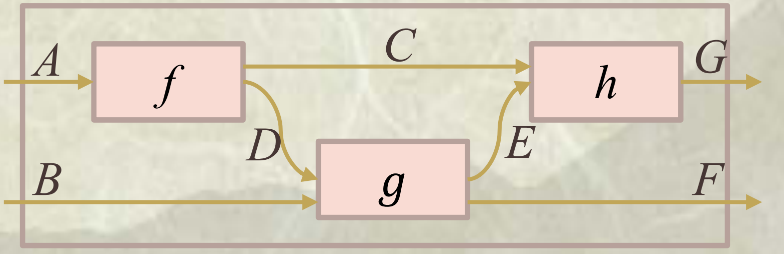
  - En « externe » pour le routage;
  - En « interne » pour la transition externe (sic!) :

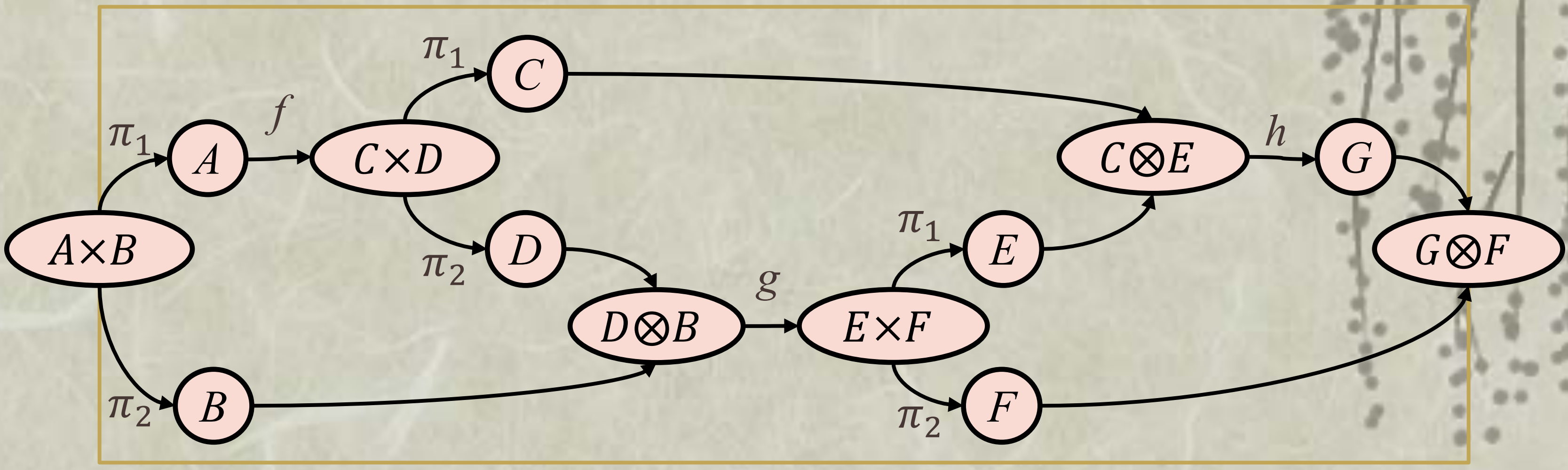
$$\delta_{ext} : (X_i \times \mathbb{R}^{\geq 0})^{(X_1 \times \cdots \times X_n \times \mathbb{R}^{\geq 0})} \times X \times S \times \mathbb{R}^{\geq 0} \longmapsto S \times \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$$(\pi_i, (x_1, \dots, x_n, r_m), s_i, t_i) \rightarrow (s_j, t_i + r_m)$$

port

Morphisme DEVS couplé ⟼ catégorie des trajectoires





Contenu

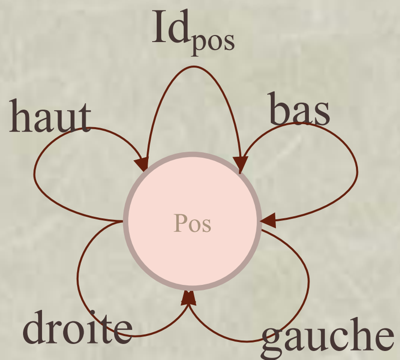
- Introduction
- Les méta-modèles
- Le morphisme
- **Conclusion**

Conclusion

- Nous avons défini un morphisme des modèles DEVS atomiques et couplés vers une catégorie de trajectoires dont les morphismes sont les couplages et les modèles DEVS eux-mêmes
- La catégorie de trajectoires définit une sémantique fonctionnelle de DEVS: modèle de flux => parallélisation !

Perspectives (1)

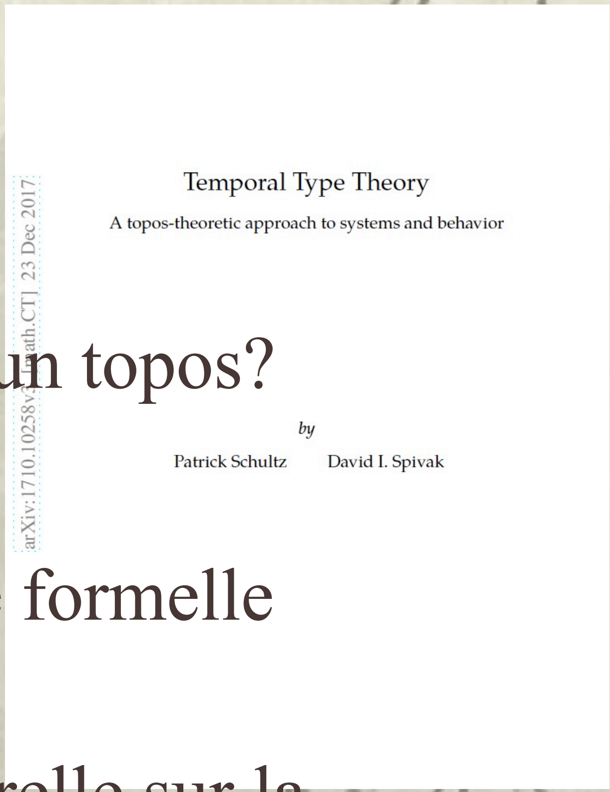
- Les monoïdes représentés:
  - Monoïde libre
  - + équations sur les équivalences de séquence:
    - $[x_1, \ldots, x_n] \cong [x'_1, \ldots, x'_m]$
  - Exemple: $[bas, haut] \cong [haut, bas] \cong []$



- Question: comment les équations sont transformées par les morphismes.

Perspectives (2)

- La catégorie des trajectoires:
  - Est-elle un topos?
  - Peut-elle être « morphée » dans un topos?
- Pourquoi?
  - Un topos est muni d'une logique formelle interne
  - Par exemple: une logique temporelle sur la topologie des intervalles



arXiv:1710.10258v3 [math.CT] 23 Dec 2017

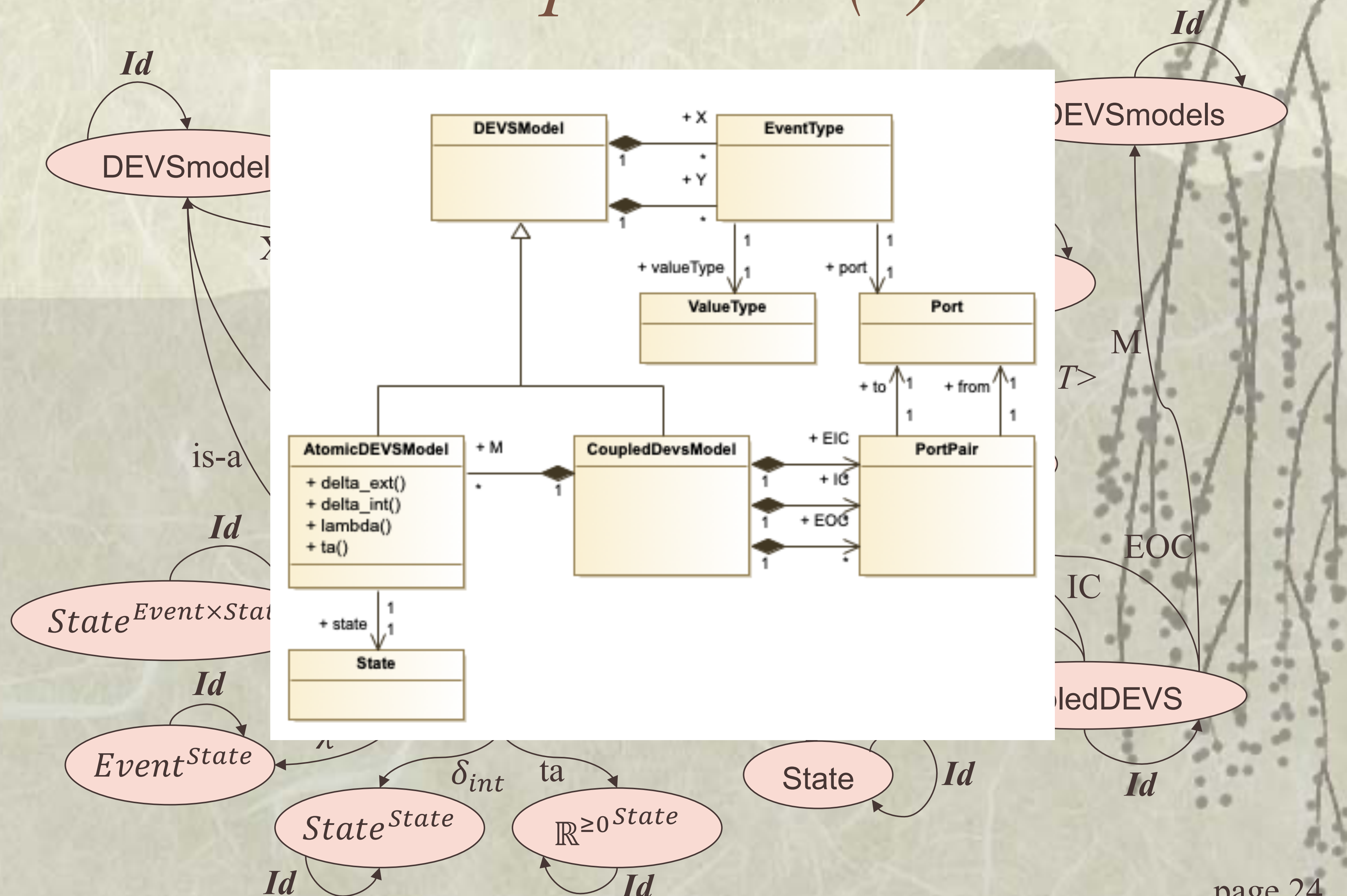
Temporal Type Theory

A topos-theoretic approach to systems and behavior

by

Patrick Schultz David I. Spivak

Perspectives (3)



Perspective (3-bis)

- Donc on peut construire DANS LA THEORIE DES CATEGORIES le morphisme de la catégorie DEVS dans la catégorie des trajectoires